Erilised summad

e-kursus Moodle e-õppe keskkonnas

TARTU ÜLIKOOL teaduskool

See kursus on Sulle, kui

- õpid gümnaasiumiastmes
- tunned huvi matemaatika ja ülesannete lahendamise vastu
- tahad arendada enda matemaatilist mõtlemist
- oskad iseseisavalt omandada ja rakendada uusi matemaatikaalaseid teadmisi

Õpiväljundid

Kursuse läbinud õpilane:

- tunneb ja oskab rakendada paarideks jaotamise meetodit „pikkade“ summade arvutamiseks; tunneb erinevaid võtteid *erilise* summa leidmiseks ja oskab neid rakendada teiste arvutusülesannete lahendamisel ja uute valemite tuletamisel;
- oskab rakendada *erilise* summa valemit kujundite ridade ja arvtabelite uurimisel ning tekstülesannete lahendamisel;
- tunneb „matemaatilise teleskoobi“ toimimise põhimõtet spetsiaalsete summade ja korrutiste arvutamiseks; oskab esitada etteantud korrutised ja summad teleskoopkorrutistena ja -summadena ning arvutada nende täpsed väärtused;
- teab Fibonacci ja Lucas' jadade definitsioonid ja tunneb Fibonacci arvudest kõige tuntuma ülesande (küülikute paljunemine ideaaltingimustes) lahendusideed; tunneb Fibonacci arvude summade arvutamise strateegiat ja oskab seda rakendada sarnaste ülesannete lahendamisel;
- tunneb *erilise* summa valemi „teleskoopilise“ tõestuse põhimõtet ja oskab seda rakendada täisruutude ja -kuupide summa leidmiseks.

Kursuse maht	3 EAP, 78 akadeemilist tundi
Sihtrühm	Matemaatikast huvitatud õpilased alates 10. klassist
Vastutav õppejõud	Maksim Ivanov, MSc; maxim5@ut.ee
Osavõtutasu õpilastele	30 eur
Tulumaksutagastus füüsilisest isikust maksjale	Ei
Õpetamise aeg	2023/2024. õ.-a., alates 9. oktoobrist 2023
Õppetöö vorm	Õppetöö toimub Moodle e-õppe keskkonnas
Hindamise vorm ja lõpetamise tingimused	Eristav (A, B, C, D, E, F, mitteilmunud); koondhinne kujuneb testide ja kontrolltöö lahendamise eest saadud punktide summast. Kokku on võimalik kursuse jooksul saada kuni 200 punkti (testide eest kuni 150 punkti ja kontrolltöö eest kuni 50 punkti). Tunnistuse saamiseks tuleb saada vähemalt 100 punkti, kusjuures ka kontrolltöö peab olema sooritatud. Kursuse koondhinne arvutatakse

	järgmise skaala alusel: o hinne A (suurepärane): 180 - 200 punkti o hinne B (väga hea): 160 - 179,99 punkti o hinne C (hea): 140 - 159,99 punkti o hinne D (rahuldav): 120 - 139,99 punkti o hinne E (kasin): 100 - 119,99 punkti o hinne F (puudulik): 99,99 punkti või vähem Kui saadud punktide summa on väiksem kui 100 punkti, siis õppijale väljastatakse tõend osalises mahus kursuse läbimise kohta, tingimusel, et vähemalt üks teema on läbitud. Teema loetakse läbituks, kui vastavate testide eest saadud tulemus on vähemalt 25 punkti 50-st. Sellisel juhul loetakse antud teema läbituks 0,75 EAP mahus.

Teemad	**Hinnatavad tööd**
1. teema "Üks eriline summa" (kuni 50 punkti)	Test 1 (paarideks jaotamine) [12p] Test 2 (arvu esitamine erilise summa osana) [5p] Test 3 (valemite tuletamine) [8p] Test 4 (kujundid ja tabelid) [8p] Test 5 (tekstülesanded) [9p] Test 6 (veel huvitavaid teemakohaseid ülesandeid) [8p]
2. teema "Matemaatiline teleskoop" (kuni 50 punkti)	Test 1 (teleskoopkorrutised) [12p] Test 2 (teleskoopsummad) [10p] Test 3 (teleskoopsummad II) [12p] Test 4 (neli tegurit nimetajas) [6p] Test 5 (raskemad ülesanded teleskoopidest) [10p]
3. teema "Fibonacci arvud" (kuni 50 punkti)	Test 1 (Fibonacci jada) [6p] Test 2 (Fibonacci arvude summa) [11p] Test 3 (valemite tuletamine) [6p] Test 4 (Lucas' jada) [8p] Test 5 (ruutude ja kuupide summa) [13p] Test 6 (rekurrentsed seosed) [6p]
4. teema „Kursuse kokkuvõte“ (kuni 50 punkti)	Kokkuvõttev kontrolltöö [50p]

Kursuse sisu kirjeldus

Selles gümnaasiumiastme õpilastele mõeldud kursuses uuritakse erinevaid võtteid „pikkade“ summade leidmiseks ning rakendatakse neid huvitavate summade arvutamiseks ja ka tekstülesannete lahendamiseks. Seejuures välditakse nende „pikkade“ summade otsesest arvutamist, mis mõnel juhul nõuab lihtsalt palju aega ja mõnikord osutub ka võimatuks (näiteks valemite tuletamisel). *Eriliseks* summaks antud kursuse raames nimetatakse esimeste naturaalarvude summat, mille valem

$$1 + 2 + \ \dots \ + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

leiab rakendust selle kursuse paljude ülesannete lahendamisel.

Kursus „Erilised summad“ koosneb kolmest mahukast teemast: "Üks eriline summa", "Matemaatiline teleskoop" ja "Fibonacci arvud" ning kursuse kokkuvõttest.

Esimeses osas "Üks eriline summa" vaadeldakse näiteid paarideks jaotamise meetodi rakendamisest teatud tüüpi arvutusülesannete lahendamisel, uuritakse erinevaid võtteid *erilise* summa või selle mingi osa leidmiseks. Näiteks avastatakse, et esimeste paaritute arvude summa, milles on kokku n liidetavat, võrdub täisruuduga n^2. Siis rakendatakse tuletatud *erilise* summa valemit kujundite ümbermõõdu ja pindala leidmisel, arvtabelite uurimisel ja ka tekstülesannete lahendamisel. Selle osa illustreerivaks näiteks on järgmine moekunstniku ülesanne.

Moekunstnikul on kasutada hulk Swarovski kristalle kaaluga 20, 22, 24, ..., 98 ja 100 grammi. Neist tuleb kostüümi kaunistuseks valida komplekt, kus kõik kristallid on erineva kaaluga ja nende kogukaal on täpselt 2400 grammi. Mitu erinevat sellist kristallide komplekti on võimalik valida?

Kursuse teises osas tutvustatakse nn „matemaatilise teleskoobiga“ ehk meetodiga, mille rakendamisel antud summa või korrutise olemasolevad liikmed teisendatakse nii, et tekib avaldis, milles enamus liikmeid kas koondub või taandub. Teleskoobi põhimõtet rakendades saab kiiresti arvutada näiteks summa

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ \dots \ + \frac{1}{999 \cdot 1000}$$

täpset väärtust $0{,}999$.

Kursuse viimases osas "Fibonacci arvud" tutvustatakse rekurrentse seose mõistega (kui jada iga järgmine liige sõltub kas ühe või mitme eelmise liikme väärtusest mingi kindla eeskirja kohaselt) ja selle rakendamisega erinevate summade arvutamisel. Rekurrentse jada üheks näiteks on Fibonacci arvude jada $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$, milles kaks esimest liiget on mõlemad võrdsed ühega ($F_1 = F_2 = 1$) ning alates kolmandast iga järgnev liige tekib kahe eelneva liikme liitmisel, st $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Selle abil saab näiteks arvutada, mitu erinevat võimalust on trepist ülesronimiseks tingimusel, et saab üles astuda alati kas üks või kaks astet korraga. Lisaks leitakse näiteks valemit n esimese Fibonacci arvu summa leidmiseks ($F_1 + F_2 + \ \dots \ + F_n$) ja sama põhimõtet rakendatakse näiteks n esimese täisruudu summa $1^2 + 2^2 + \ \dots \ + n^2$ arvutamiseks.